Statistische Auswertung in der Betriebsprüfung

Dr. Harald Krehl

Der Einsatz verteilungsbezogener Verfahren

- Der Einsatz verteilungsbezogener Verfahren etwa des Benford-Newcomb Verfahrens oder der Normalverteilung bzw. der LogNormalverteilung in der Betriebsprüfung wird kontrovers diskutiert. Naturgemäß finden sich Befürworter eher auf Seite der Betriebsprüfung und Ablehnungen eher auf Seiten der Wirtschaft.

- Welche Argumente für einen Einsatz gibt es:
  - **Ziffernverteilungen** nach **Benford** sind der zu erwartende Verteilungsfall. Weicht eine empirische Ziffernverteilung von der theoretischen Verteilung ab, dann können Manipulationen nicht ausgeschlossen werden.
  - **Werteverteilungen** von Umsatz- oder Kassenbuchungen sind in der Regel **normalverteilt oder lognormalverteilt**. Weicht die empirische Verteilung von der theoretischen Verteilung ab, dann können Manipulationen nicht ausgeschlossen werden.

Statistische Auswertung in der Betriebsprüfung

- Verknüpft mit weiteren Prüfungsansätzen, etwa der Zeitreihenbetrachtung oder analytischen Prüfungsansätzen über Kennzahlen, ergibt sich ein schlagkräftiges Instrumentarium auf Seite der Betriebsprüfung.
- Der praktizierende Steuerberater und der mittelständische Unternehmer sind den durch statistische Methoden begründeten Fragestellungen in der Regel hilflos ausgeliefert.
- Kann man aus dem Vergleich theoretischer und empirischer Verteilungen ableiten, dass die empirische Wertestruktur anzupassen ist, dass Werte zusätzlich anzunehmen sind oder dass die Finanzbuchführung manipuliert wurde oder doch mindestens auffällig erscheint?

DATEV

Was ist ein Benfordtest?

- Bei diesem Test wird davon ausgegangen, dass sich die Ziffern, aus denen eine Zahl besteht, an der ersten oder zweiten Stelle dieser Zahl nicht gleich verteilen, sondern einer bestimmten Logik folgen, die von **Simon Newcomb 1881** entdeckt wurde und die der Physiker **Frank Benford 1938** publizierte. Die allgemeine Form des Newcomb-Benford's Law (NBL) lautet:
- *„Je niedriger der zahlenmäßige Wert einer Ziffernsequenz bestimmter Länge an einer bestimmten Stelle einer Zahl ist, umso wahrscheinlicher ist ihr Auftreten. Für die Anfangsziffern in Zahlen des Zehnersystems gilt zum Beispiel: Zahlen mit der Anfangsziffer 1 treten etwa 6,5-mal so häufig auf wie solche mit der Anfangsziffer 9.*"

  (Benfordsches Gesetz zitiert nach Wikipedia)

Vgl.: Newcomb, American Journal of Mathematics 1881, S. 39f

Vgl.: Internetquelle: Benfordsches Gesetz. In: Wikipedia. Die freie Enzyklopädie. Aufruf: http://de.wikipedia.org/wiki/Benfordsches_Gesetz. Zitierter Aufruf vom 08.02.2013.

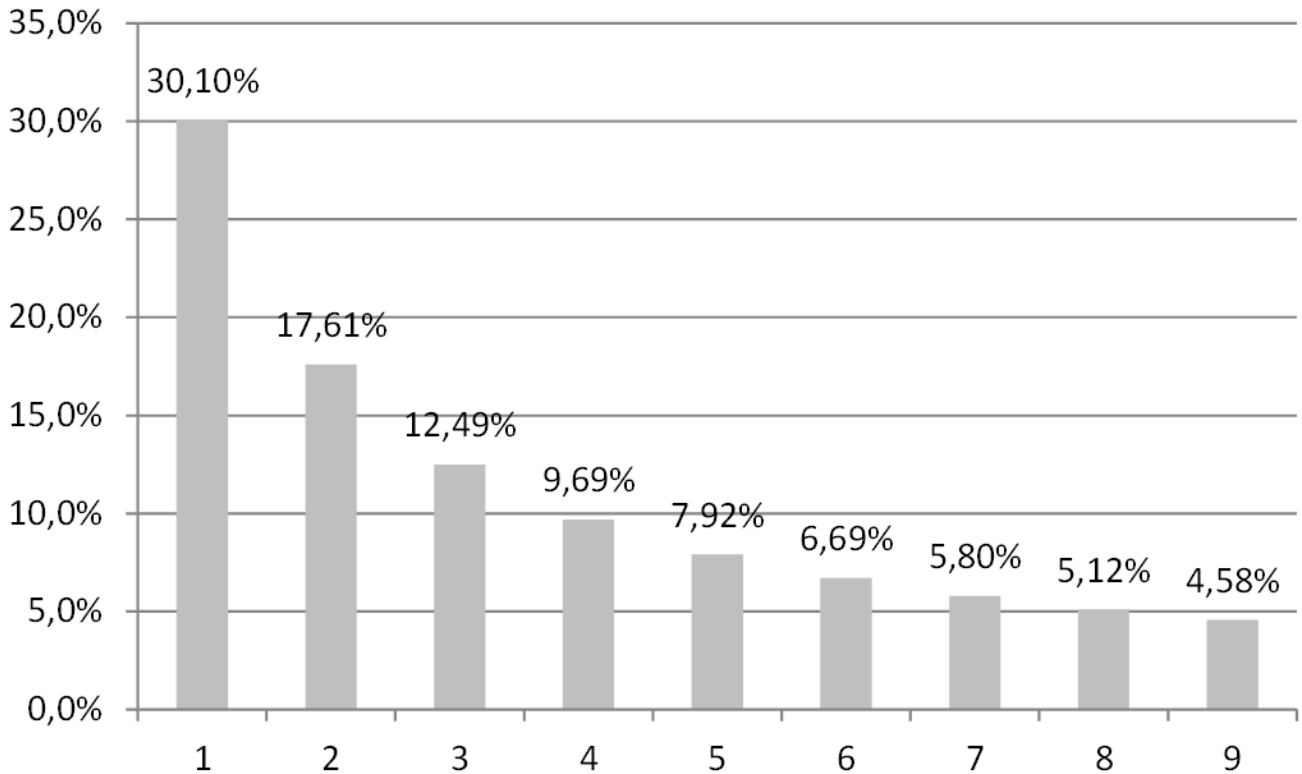
Begründung der Anwendung

Die Begründung, diesen Test bei Prüfungen anzuwenden, liegt in der Überlegung, dass bei **Manipulationen** unbewusst bestimmte Zahlen und Ziffern gewählt werden. Geschieht dies häufig, so weicht die Häufigkeit für das Auftreten der Ziffern etwa an der ersten Stelle der Zahlen von der erwarteten Häufigkeit nach Benford ab.

Es wird also die Benfordverteilung als Normalfall definiert. Abweichungen stellen generell Auffälligkeiten dar.

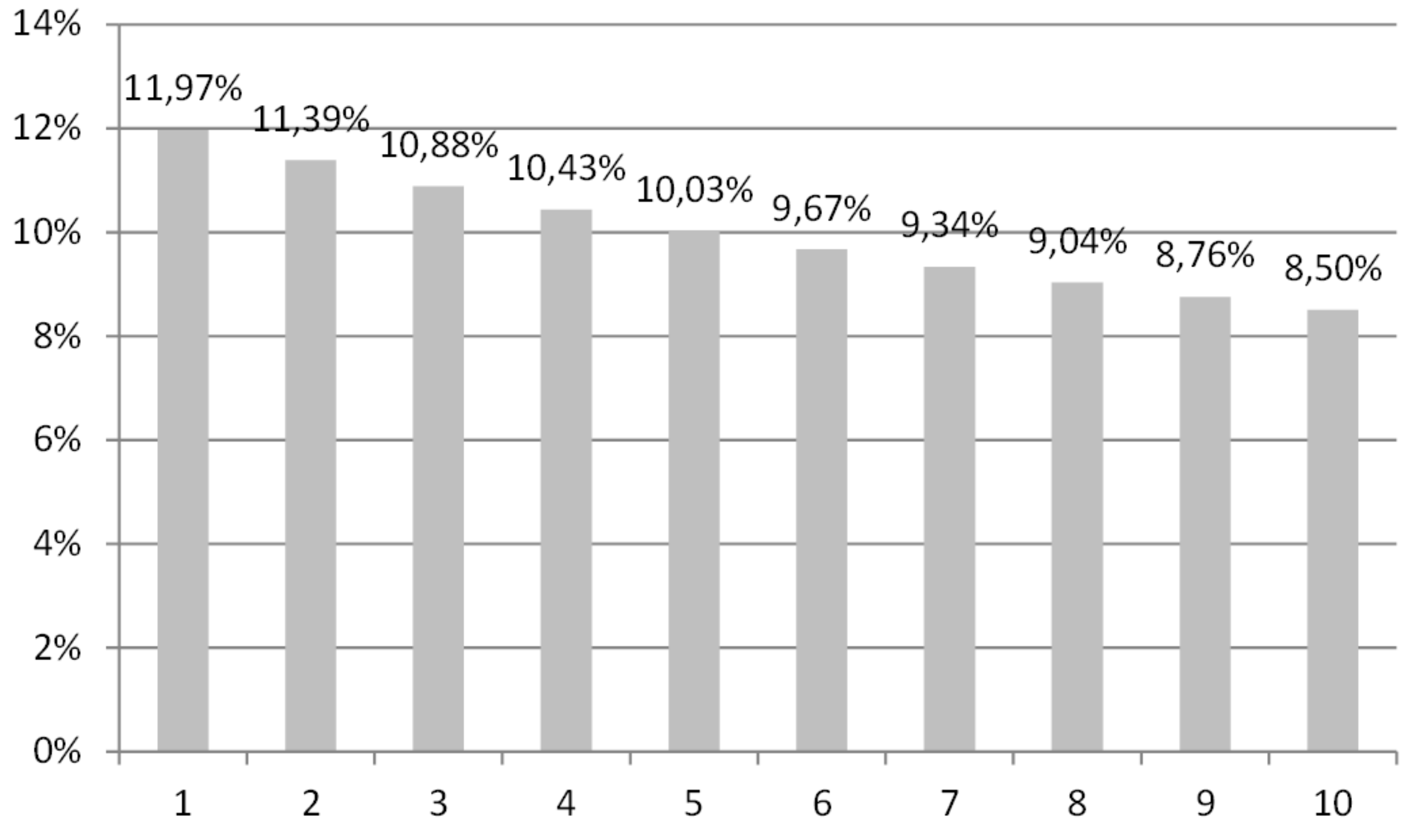
Benfordverteilung von Ziffern

Für die Häufigkeitsverteilung für Ziffern an der **ersten Stelle einer Zahl** nach Benford ergibt sich allgemein folgende Verteilung:



Benfordverteilung von Ziffern

Bezogen auf die zweite Stelle ergibt sich folgende Verteilung:



DATEV

Beispiel: Kassenkonto

Auf dem Kassenkonto mit der Nummer 1000 gibt es 251 Buchungen. Die Daten stammen aus dem Testbestand der Finanzbuchführung der DATEV e.G. Musterholz für das Jahr 2012.

Datum	Wert	Gegenkonto	Jahr	Text	Org 1	Org 2	EB
01.01.2012	133,55	9000	2012	EB-Wert			1
04.01.2012	-63,29	1369	2012	Testhansen			0
05.01.2012	-35	2382	2012	Sternsinger			0
05.01.2012	550	1360	2012	Kasseneinlage			0
05.01.2012	-28	4640	2012	Blumen	90		0
09.01.2012	-145	4910	2012	Briefmarken	90		0
09.01.2012	-5,38	4250	2012	:einigungsbedarf	10		0
11.01.2012	-210	4651	2012	Bewirtung	90		0
12.01.2012	-60,11	4930	2012	Ordner	90		0
12.01.2012	-136	1369	2012	Zur Test-Linde			0
13.01.2012	250	1360	2012	Kasseneinlage			0
16.01.2012	-51,23	4530	2012	Diesel	20		0
18.01.2012	250	1360	2012	Kasseneinlage			0
19.01.2012	-30,26	4530	2012	Motoröl	20		0
19.01.2012	-67,81	4940	2012	Steuergesetze	90		0
20.01.2012	-8,33	1369	2012	Testmarkt			0
20.12.2012	-123	4910	2012	Briefmarken	90		0
21.12.2012	-120,13	4530	2012	Benzin	20		0
21.12.2012	-195	2381	2012	:s fränk.Testbier			0
27.12.2012	-57,41	4640	2012	ır Verkaufsraum	90		0
27.12.2012	300	1360	2012	Kasseneinlage			0
28.12.2012	-60,17	4530	2012	Benzin	20		0
28.12.2012	-105	4910	2012	Briefmarken	90		0
28.12.2012	-21,64	4530	2012	Autowäsche	N XY 123		0

DATEV

Beispiel: Kassenkonto / Ziffernermittlung

Für jede Buchung wird der Ziffernwert der ersten und zweiten Stelle eines Betrages berechnet.

Numer	Wert	Wert positiv	Wert negativ	Wert 1. Stelle	Wert 2. Stelle
1	650,00	650,00		6	5
2	615,00	615,00		6	1
3	600,00	600,00		6	0
4	600,00	600,00		6	0
5	600,00	600,00		6	0
6	580,00	580,00		5	8
7	550,00	550,00		5	5
8	550,00	550,00		5	5
9	550,00	550,00		5	5
10	550,00	550,00		5	5
11	530,00	530,00		5	3
12	530,00	530,00		5	3
244	-195,00		195,00	1	9
245	-198,74		198,74	1	9
246	-199,76		199,76	1	9
247	-203,98		203,98	2	0
248	-210,00		210,00	2	1
249	-278,26		278,26	2	7
250	-340,45		340,45	3	4
251	-352,11		352,11	3	5

DATEV

Beispiel: empirische und theoretische Ziffernhäufigkeiten

Formel zur Ermittlung der Häufigkeit des Auftretens einzelner Ziffern nach Benford an der ersten Stelle einer Zahl.

$$(\text{Log}_{10}(i+1) - \log_{10}(i)) * n$$

i = Ziffernwert (1 bis 9)

n = Zahl der Buchungen

In unserem Beispielsfall ergibt sich folgende Häufigkeitstabelle:

Buchungzahl	Die erste Stelle				Die zweite Stelle		
251	Häufigkeit empirisch	Häufigkeit theoretisch	Chi^2 te		Häufigkeit empirisch	Häufigkeit theoretisch	Chi^2 te
0				0	30	28	0,1429
1	57	76	4,7500	1	30	27	0,3333
2	40	44	0,3636	2	20	26	1,3846
3	28	31	0,2903	3	17	25	2,5600
4	17	24	2,0417	4	12	24	6,0000
5	33	20	8,4500	5	40	23	12,5652
6	28	17	7,1176	6	17	22	1,1364
7	13	15	0,2667	7	27	21	1,7143
8	14	13	0,0769	8	23	21	0,1905
9	21	11	9,0909	9	20	20	0,0000
Summen	251	251	32,4478		236	237	25,8843

Chi^2 Wert für die Ziffer 1: $(57 - 76)^2 / 76 = 4{,}75$ Prüfwert : 32,4478 / 8 = 4,056

Beispiel: Ist die Differenz zufällig oder nicht?

Das hier zu nutzende Testverfahren ist der Chi-Quadrat-Test. Die Statistik liefert uns eine standardisierte Prüfgröße, bis zu deren Wert etwa 90 %, 95 % oder 99 % Chi-Quadrat verteilte Differenzen enthalten sind. Liegen die summierten Chi-Quadrat Differenzen – bereinigt um die Freiheitsgrade - als Prüfwert über dieser Prüfgrenze, können wir davon ausgehen, dass die Abweichungen zwischen empirischen Häufigkeiten und theoretischen Häufigkeiten nicht zufällig sind.

In unserem Fall ergibt sich:

Prüfwert	Irrtum	Prüfgröße
4,0560	0,05	15,5073

Auftreten der Ziffern an der ersten Stelle eher unauffällig!

Da der Prüfwert nicht größer ist als die Prüfgröße, ist das Auftreten der ersten Ziffern in den Buchungen eher unauffällig. Diese Aussage gilt mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % oder einem Konfidenzniveau von 95 %. Übliche Niveaus in der Teststatistik sind 90% bis 99%.

Anwendungsbeispiel

- DATEV GDPdU Daten
- Export aus Kanzleirechnungswesen
- Mandant Musterholz
- SKR 03
- Jahr 2012
- Kassenkonto 1000

Was ist ein Test auf Log-Normalverteilung?

In der Betriebsprüfung wird bei der Plausibilisierung von Einnahmen oder Erlösen oft auch ein Test auf eine Normalverteilung oder auf eine Log-Normalverteilung vorgenommen. Eine **Log-Normalverteilung** ist eine Verteilung, bei der die **Ursprungswerte logarithmiert** werden. Setzt man eine Normalverteilung voraus, so würden wegen der Symmetrie der Verteilung niedrige Werte (→ links vom Mittelwert) die gleichen Wahrscheinlichkeiten aufweisen wie höhere Werte (→ rechts vom Mittelwert). Logarithmiert man die Ursprungswerte, wird die Verteilung linkssteil und **wir erwarten öfter höhere Werte** (→ rechts vom Mittelwert) als bei einer Normalverteilung auf Basis der Ursprungswerte.

Begründung der Anwendung

Inhaltlich bedeutet die Anwendung einer Log-Normalverteilung durch den Prüfer, dass er für höhere Werte **eine höhere Häufigkeit erwartet**, als diese möglicherweise tatsächlich vorliegen. Höhere Werte fehlen also, aus unterschiedlichen Gründen. Natürlich wird der Prüfer diese formale Logik nur für Erträge und nicht für Aufwendungen anwenden.

Es wird also die LogNormalverteilung als Normalfall definiert. Abweichungen stellen generell Auffälligkeiten dar.

DATEV

Beispiel: Prüfung Umsatzerlöse Buchungen

Insgesamt werden 827 Buchungen der Konten 8000-8743 eingelesen. 642 Buchungen haben einen negativen Wert

WAHR

Saldodarstellung:	nicht invertieren
Konto:	8000-8743
Wirtschaftsjahr:	2012
Datum von	01.01.2012
Datum bis	31.12.2012

Saldo: -4.782.231,93

Anzahl 827

Datum	Wert	Gegenkonto	Jahr	Text	Org 1
09.02.2012	-11687,62	40000	2012		299
15.03.2012	-4753,29	40000	2012		299
27.06.2012	-16847,39	40000	2012		299
27.06.2012	-5891,99	40000	2012		299
28.06.2012	-7979,69	40000	2012		299
25.10.2012	-7093,83	40000	2012		299
16.01.2012	-8362,15	30300	2012	EG	202
30.01.2012	-8141,07	30300	2012	EG	299
07.02.2012	-17107	40100	2012	EG	299
08.02.2012	-2905,41	30300	2012	EG	299
16.02.2012	-13968,83	40100	2012	EG	299
17.02.2012	-11807,63	40100	2012	EG	299

DATEV

Sortieren und logarithmieren der Buchungen

Die Buchungen werden der Größe nach absteigend sortiert und danach für positive und negative Werte in den jeweils getrennten Spalten aufbereitet. Die negativen Werte werden invertiert. Für beide Spalten werden die logarithmierten Werte berechnet, um die Log-Normalverteilung berechnen zu können. Die nachfolgende Tabelle zeigt die Berechnungen. Die Spalten mit den Bezeichnungen „Wert 1. Stelle" und „Wert 2. Stelle" werden für den Benfordtest benötigt.

Werte der Größe nach erfassen oder importieren.	Zahl der Werte:	827	Mittelwert	-5.782,63	Mittelwert Log+	5,17	Mittelwert Log-	8,702
	Saldo:	-4.782.231,93	Standard-abweichung	5.205,35	Standard-abweichung Log+	0,68	Standard-abweichung Log-	0,899

Numer	Wert	Wert positiv	Wert negativ	Log +	Log -	Wert 1. Stelle	Wert 2. Stelle
186	-0,05		0,05		-2,996	0	zu klein
187	-33,39		33,39		3,508	3	3
188	-181,18		181,18		5,199	1	8
189	-194,39		194,39		5,270	1	9
190	-294,12		294,12		5,684	2	9
191	-294,12		294,12		5,684	2	9
820	-17.111,09		17.111,09		9,747	1	7
821	-20.734,12		20.734,12		9,940	2	0
822	-20.812,90		20.812,90		9,943	2	0
823	-21.630,76		21.630,76		9,982	2	1
824	-24.012,06		24.012,06		10,086	2	4
825	-44.518,11		44.518,11		10,704	4	4
826	-47.217,22		47.217,22		10,763	4	7
827	-56.282,45		56.282,45		10,938	5	6

DATEV

Erstellen der Häufigkeitstabelle für die empirischen Werte

Nach Freedmann und Diaconics ergibt sich in unserem Fall eine Mindestklassenzahl von 52. Wir wählen eine Gruppenzahl von 100, um eine möglichst genaue Verteilung zu erhalten. Die Buchungen werden gruppiert, um eine Häufigkeitstabelle zu erhalten. Die Gruppenbreite beträgt (56.282,45 – 0,05)/100 = 563.

Klasse	Klassen-grenzen	Häufigkeit absolut	Häufigkeit in %	Häufigkeit absolut kumuliert	Häufigkeit kumuliert in %
	absteigend				
Klasse 100	56.282	1	0,16%	642	100,00%
Klasse 99	55.720	0	0,00%	641	99,84%
Klasse 98	55.157	0	0,00%	641	99,84%
Klasse 20	11.256	27	4,21%	557	86,76%
Klasse 19	10.694	21	3,27%	530	82,55%
Klasse 18	10.131	27	4,21%	509	79,28%
Klasse 17	9.568	28	4,36%	482	75,08%
Klasse 4	2.251	13	2,02%	48	7,48%
Klasse 3	1.688	11	1,71%	35	5,45%
Klasse 2	1.126	5	0,78%	24	3,74%
Klasse 1	563	19	2,96%	19	2,96%

Parameter für Normalverteilung und Log-Normalverteilung

Um die Häufigkeiten für die Normalverteilung und die Log-Normalverteilung zu berechnen, sind Mittelwert und Standardabweichung zu berechnen. Die Parameter lauten:

Mittelwert	Normal	7.508,08
Standardabw.	Normal	4.646,73
Mittelwert	Log	8,70
Standardabw.	Log	0,90

Die relativen Häufigkeiten je Klassengrenze für die Normalverteilung errechnen sich in Excel über die Formel:

=NORM.VERT(Klassengrenzwert; Mittelwert; Standardabweichung; WAHR)

Für die Log-Normalverteilung errechnen sich die relativen Häufigkeiten je Klassengrenze über Excel:

=LOGNORM.VERT(Klassengrenzwert; Mittelwert; Standardabweichung; WAHR)

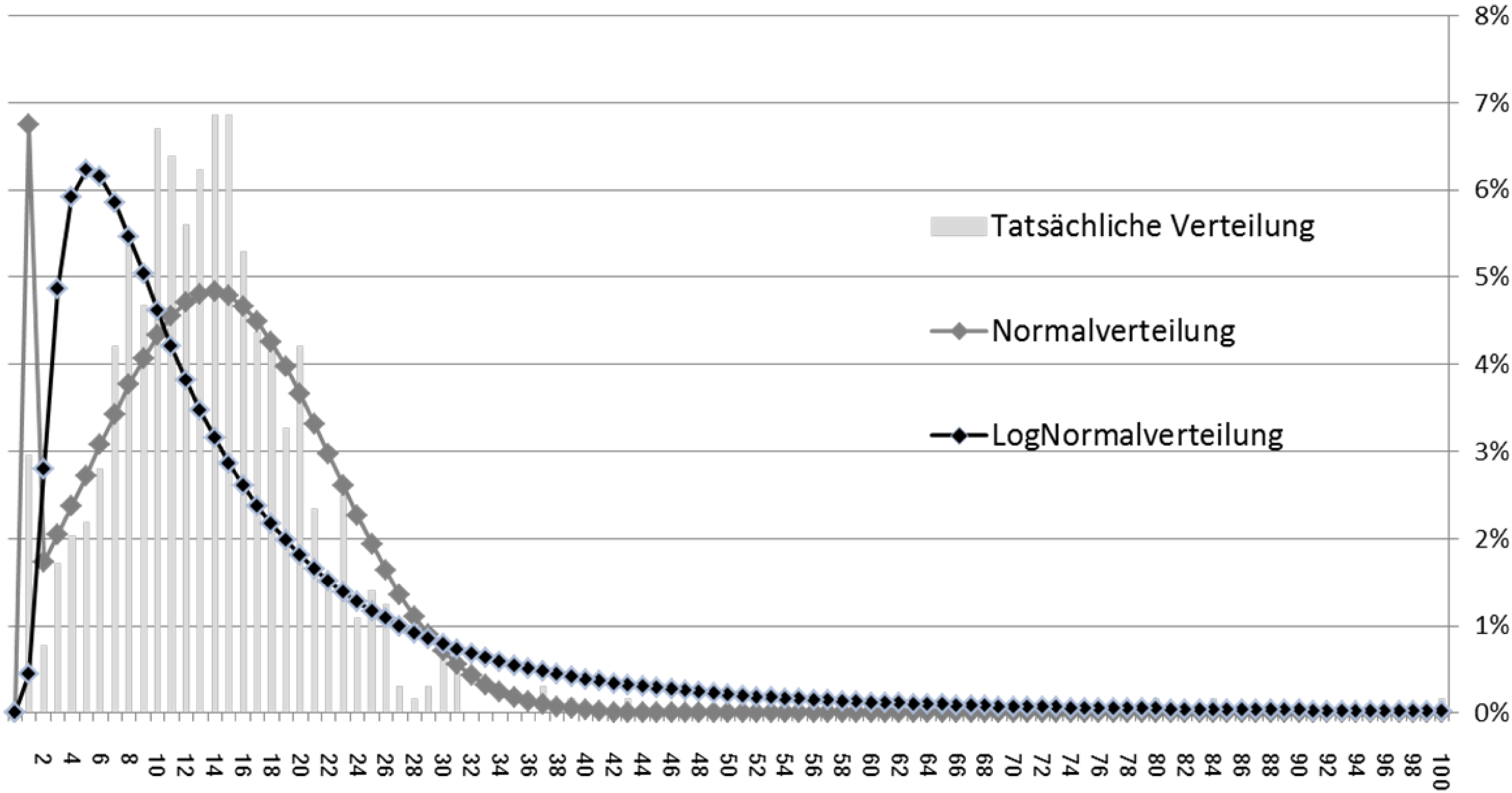
DATEV

Häufigkeitstabelle Normalverteilung / Log-Normalverteilung

Wir können jetzt auf Basis der Klassengrenzen die theoretische Häufigkeit und den Umsatzwert für jede Klasse berechnen. Für die Wertermittlung wird unterstellt, dass für jede Klasse der Durchschnittswert der Klassengrenzen gilt. Multipliziert man diesen Durchschnittswert mit der theoretischen Häufigkeit erhält man den theoretischen Wert der Klasse.

Klasse	Normal-verteilung kumuliert	Normal-verteilung	LogNorm-Verteilung kumuliert	LogNorm-Verteilung	Zahl Normal-verteilung	Wert Normal-verteilung	Zahl LogNormal-verteilung	Wert LogNormal-verteilung
Klasse 100	100,00%	0,00%	99,34%	0,02%	0,00	0	0,13	7.280
Klasse 99	100,00%	0,00%	99,32%	0,02%	0,00	0	0,14	7.761
Klasse 98	100,00%	0,00%	99,30%	0,02%	0,00	0	0,14	7.683
Klasse 65	100,00%	0,00%	97,74%	0,09%	0,00	0	0,60	21.781
Klasse 64	100,00%	0,00%	97,65%	0,10%	0,00	0	0,63	22.516
Klasse 63	100,00%	0,00%	97,55%	0,10%	0,00	0	0,66	23.217
Klasse 62	100,00%	0,00%	97,44%	0,11%	0,00	0	0,70	24.230
Klasse 61	100,00%	0,00%	97,34%	0,11%	0,00	0	0,74	25.198
Klasse 9	29,96%	4,07%	42,76%	5,03%	26,11	124.910	32,31	154.571
Klasse 8	25,89%	3,76%	37,73%	5,46%	24,15	101.942	35,05	147.952
Klasse 7	22,13%	3,43%	32,27%	5,85%	22,01	80.520	37,58	137.481
Klasse 6	18,70%	3,08%	26,42%	6,15%	19,76	61.168	39,47	122.181
Klasse 5	15,62%	2,72%	20,27%	6,23%	17,49	44.297	40,01	101.334
Klasse 4	12,90%	2,38%	14,04%	5,91%	15,25	30.041	37,95	74.757
Klasse 3	10,52%	2,04%	8,13%	4,87%	13,11	18.447	31,28	44.013
Klasse 2	8,48%	1,73%	3,25%	2,80%	11,10	9.371	17,99	15.188
Klasse 1	6,75%	6,75%	0,45%	0,45%	43,34	12.196	2,90	816

Grafischer Vergleich der Häufigkeitstabellen



Varianten der Hochrechnung

- Strukturelle Anpassung **jedes** Wertes an die theoretische Verteilung
- **Verschiebung** der Häufigkeiten niedrigerer Klassen auf vermutete höhere Klassen
- Berechnung erwarteter **zusätzlicher** Werte.

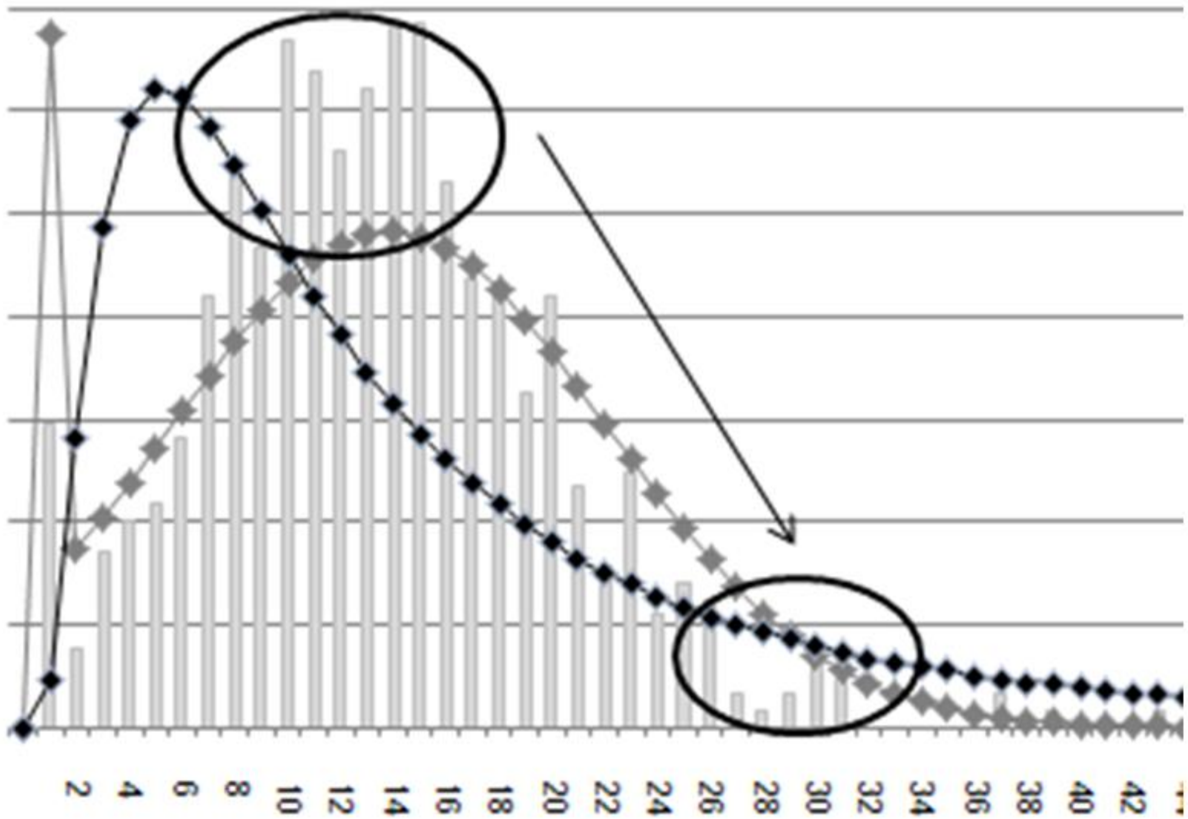
Strukturelle Anpassung

Bei der **strukturellen Anpassung jedes Wertes** an die theoretische Verteilung geht man davon aus, dass die **Häufigkeit der Werte exakt der theoretischen Verteilung** folgt. Addiert man die Spaltenwerte in der Spalte „Wert Normalverteilung“ bzw. „Wert Log-Normalverteilung“ erhält man die jeweilige Hochrechnung. Im Ergebnis ergeben sich folgende hochgerechnete Umsatzwerte:

Strukturelle Hochrechnung			
Normalverteilung		LogNormalverteilung	
Zahl	Hochrechnung	Zahl	Hochrechnung
642	4.897.465	638	5.440.892
Tatsächlich	4.820.189	Tatsächlich	4.820.189
Differenz	**77.276**	**Differenz**	**620.703**

Verschiebung

Bei der Verschiebung der Häufigkeiten niedrigerer Klassen in höhere Klassen geht es darum, auffällige **Häufigkeitsunterschiede auszugleichen**. In unserem Beispiel würde bei Unterstellung einer Normalverteilung die Klassen 27,28,29 sowie die Klassen 32 bis 36 eine höhere Häufigkeit zu Lasten der Gruppen 7 bis 16 erhalten.



DATEV

Berechnung zusätzlicher oder fehlender Werte

Die **Berechnung erwarteter zusätzlicher Werte** unterstellt **fehlende Umsatzwerte**. Die nachfolgende Abbildung zeigt für die Log-Normalverteilung, dass unter Berücksichtigung der obersten Umsatzklasse 99,34 % der Werte enthalten sind. Man könnte sich fragen, welcher oberste Wert denn mit der Log-Normalverteilung erwartet werden kann? Geht man von einer Berücksichtigung von 100 % aller theoretischen Fälle aus, dann ist mit einem Wert in Höhe von 97.850 noch zu rechnen. **Insgesamt fehlen vier Werte bis zu 100 %,** unterstellt man eine Log-Normalverteilung. Unterstellt man dagegen eine Normalverteilung, dann fehlen keine Werte.

	Normal	LogNormal	99.99 %	Höchste Werte
Höchster Wert:	100,00%	100,00%	Normal	24.789,36
erreicht:	100,00%	99,34%	LogNorm	97.849,64
Differenz	0,00%	0,66%	Tatsächlich	56.282,45
erwartet werden:	0	4		

Hochrechnung Annahme fehlende Werte		
	Normal	LogNormal
Durchschnitt	0	30.032
Obere Werte	0	308.264
Wert Klasse 100	0	225.130
Wert fünf	0	220.627

Anwendungsbeispiel

- DATEV GDPdU Daten
- Export aus Kanzleirechnungswesen
- Mandant Musterholz
- SKR 03
- Jahr 2012
- Umsatzkonten 8000 - 8743

Zum Abschluss die Königsfrage: Benford/LOG-Normal - Stimmt das denn?

Das Hauptargument für die Anwendung der verteilungsbezogenen Tests wird über den Zufallsaspekt geführt. Eine **nicht** manipulierte Ziffernverteilung folge dem **Zufallsprinzip** und dieses Zufallsprinzip werde bei Ziffern durch die Benfordverteilung repräsentiert. Eine **nicht** manipulierte Werteverteilung bei Umsatz oder Kasse folge dem **Zufallsprinzip** und dieses Prinzip sei durch die Normalverteilung bzw. die Log-Normalverteilung repräsentiert.

Vielen Dank

Dr. Harald Krehl und

Dr. Stefan Strobel

Literaturhinweis: Krehl, Strobel, Schaller: Stichproben und statistische Verfahren im Abschluss- und Prüfungsprozess. Eine praxisorientierte Einführung mit Lösungen in Excel, ACL, DATEV ACL Comfort und DATEV Sampling. Schongau 2014. ISBN 978-3-945252-00-0